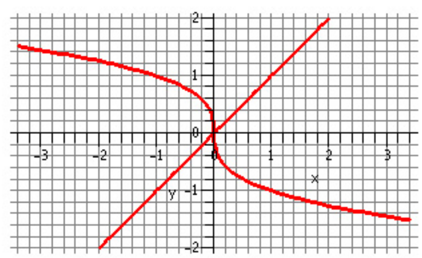
16 avril 2007 Nom:
10h30–12h20

MAT-19519 Examen 2

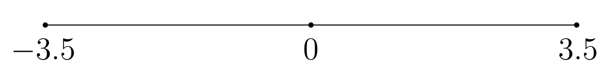
1. (5+5+10 = 20 points) La figure ci-dessous présente le graphe d'une fonction $f\colon [-3.5, 3.5] \to [-3.5, 3.5]$ ainsi que la droite $y = x$. Répondre aux questions suivantes en vous aidant de la figure.



   (a) Identifier tous les points fixes de f, en indiquant pour chacun s'il est attractif, répulsif ou indifférent.

   (b) Identifier un cycle de période minimale 2 de f. Est-il attractif, répulsif ou indifférent?

   (c) Représenter schématiquement sur le segment suivant la dynamique de la fonction f.



2. (20 points) Tracer le diagramme de bifurcation de la fonction

$$f(x) = r \sin x$$

au voisinage de $r = 1$, en indiquant par une ligne pleine les points attractifs et par une ligne pointillée les points répulsifs. Quel type de bifurcation a-t-on en $r = 1$?

3. $(5+10+5+5+10=35$ points) On définit g sur le cercle unité S^1 par

$$g(\theta) = 3\theta.$$

(a) Identifier tous les points périodiques de g.

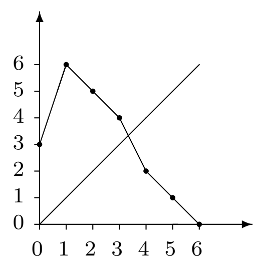
(b) Montrer que g est chaotique sur S^1.

(c) On définit $p(x) = 4x^3 - 3x$. Vérifier que p envoie l'intervalle $[-1, 1]$ dans lui-même.

(d) Déterminer une fonction $h\colon S^1 \to [-1, 1]$ telle que $p \circ h = h \circ g$. [Aide: on pourra utiliser sans démonstration l'identité trigonométrique $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.]

(e) La fonction p est-elle chaotique sur $[-1, 1]$? Expliquer.

4. $(5+5+5+5+5 = 25$ points$)$ La figure ci-dessous représente le graphe d'une fonction $f\colon [0,6] \to [0,6]$, ainsi que la droite $y = x$.



(a) Trouver un cycle de période 7 de la fonction f.

(b) Vérifier que $f^5([0,1]) = [1,6]$.

Pour la suite, on pourra admettre sans démonstration qu'on a aussi

$$\begin{aligned} f^5([1,2]) &= [2,6] \\ f^5([2,3]) &= [3,6] \\ f^5([4,5]) &= [0,4] \\ f^5([5,6]) &= [0,5]. \end{aligned}$$

(c) Montrer que f n'a pas de point de période minimale 5 en dehors de l'intervalle $[3, 4]$.

(d) Montrer que f n'a pas non plus de point de période minimale 5 dans l'intervalle $[3, 4]$.

(e) La fonction f a-t-elle un point de période minimale 3? Justifier.